

Урок №1 (06.09.2017)

Гидростатика. Закон Паскаля. Закон Архимеда. Плавание тел.

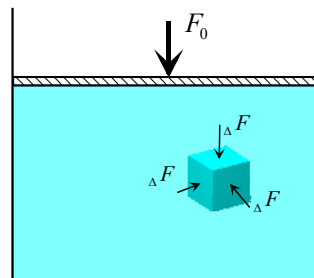
1. Давление жидкости.

Определение: Давление – это отношение **модуля** силы, действующей перпендикулярно выделенной площадке, к её площади.

Единица давления: $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$; $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$; $1 \text{ атм.} \approx 1 \text{ бар}$;
 $1 \text{ мм рт. ст.} = 133,3 \text{ кПа}$.

Находящиеся под давлением газ или жидкость действуют с некоторой силой на любую поверхность, ограничивающую их объем. Такую силу называют *силой давления*. Рассмотрим случай, когда жидкость (или газ) покоится, т.е. такую жидкость, скорость частиц которой в любой точке равна нулю (гидростатика). В этом случае сила, с которой жидкость действует на стенки ограничивающей объем поверхности, *направлена по нормали* (перпендикулярно) к этой поверхности. Если бы сила, с которой жидкость действует на поверхность, имела бы тангенциальную составляющую (т.е. составляющую, параллельную поверхности), то по третьему закону Ньютона на жидкость со стороны поверхности действовала бы сила, также имеющая тангенциальную составляющую. Под действием этой силы жидкость бы двигалась.

Рассмотрим маленький кубик с тонкими стенками, помещённый в газ или жидкость и наполненный тем же веществом, что и окружающая среда, как показано на рис.1. Т.к. жидкость неподвижна, то и кубик будет неподвижен. Следовательно, на каждую грань куба действует одна и та же сила ΔF .



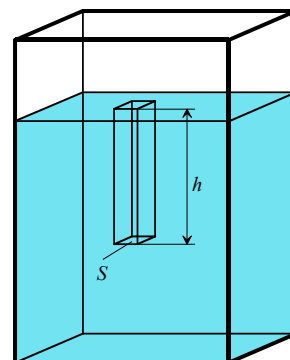
Мы здесь использовали так называемый *принцип отвердевания*: равновесие жидкости не нарушается, если какой-либо элемент её объема считать отвердевшим, т.е. если его мысленно заменить таким же по объёму и форме элементом твёрдого тела, имеющим ту же плотность.

Рис. 1. На кубик, помещённый в жидкость, действует со всех сторон одна и та же сила; в противном случае жидкость пришла бы в движение.

Несжимаемой жидкостью называется жидкость или газ, зависимость плотности которого от давления в рассматриваемой задаче можно пренебречь.

2. Давление столба жидкости.

Определим давление в несжимаемой жидкости на глубине h . Пусть жидкость находится в сосуде в безвоздушном пространстве (для того, чтобы не учитывать атмосферное давление). Выделим в ней столбик с площадью основания S высотой h (рис.2). “Заморозим” этот столбик. С боков жидкость давит на него перпендикулярно граням, не создавая вертикальной составляющей. Поэтому давление на площадку S определяется только весом выбранного столбика и не зависит от окружающей его жидкости.



Т.к. выбранный столбик неподвижен, на него снизу, со

Рис.2. Столб жидкости в поле силы тяжести.

стороны остальной жидкости, действует сила, равная его весу, $F = mg = \rho Vg = \rho Shg$ (здесь мы учли, что жидкость несжимаема). Давление на площадку S в этом случае равно

$$P = \frac{F}{S} = \rho gh$$

Отсюда видно, что давление в жидкости прямо пропорционально её плотности и глубине погружения. В частности, в однородной жидкости *на одной и той же глубине давление одинаково во всех точках*.

Жидкостный барометр.

Теперь мы можем научиться измерять давления, т.е. объяснить, как работает жидкостный барометр. Построим прибор, показанный на рис.3: возьмём стеклянную трубку, запаянную с одного конца, и заполним её некоторой жидкостью (обычно ртутью), перевернём её “вверх дном” и поместим открытый конец в сосуд с той же жидкостью. Если система находится в атмосфере, то после переворачивания не вся жидкость выльется из трубки. Действительно, в точке A на жидкость действует атмосферное давление P_A . Точки A и B находятся на одном уровне, следовательно, в точке B давление тоже равно P_A . Но давление в точке B можно найти из формулы для давления столба жидкости: $P_A = \rho gh$, т.е. столб жидкости вытесняется атмосферным давлением. Для ртути $\rho_{\text{Hg}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ и высота ртутного столба при нормальном атмосферном давлении равна

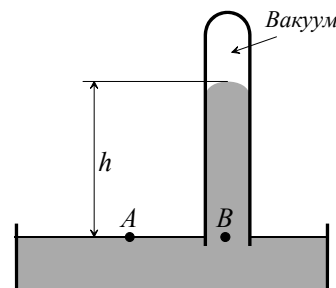


Рис.3. Принципиальная схема жидкостного барометра.

$$h_{\text{Hg}} = \frac{P_A}{\rho_{\text{Hg}} g} = \frac{1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}}{13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3 \cdot 9,8 \text{ м/с}^2} = 0,760 \text{ м}.$$

3. Закон Паскаля.

Давление, приложенное к жидкости (или газу), находящейся в ограниченном объёме, передаётся во все точки внутри объёма без изменения.

Например, если несжимаемая жидкость плотностью ρ помещена в атмосферу, то давление на глубине h согласно закону Паскаля будет равно $P = P_A + \rho gh$, где P_A – атмосферное давление.

На законе Паскаля основано действие гидравлического подъёмника (рис. 4). Подъёмник состоит из двух сообщающихся сосудов, залитых несжимаемой жидкостью (обычно маслом). Площади сечения сосудов соответственно равны S_1 и S_2 ($S_1 \ll S_2$). Поднимаемый груз кладут на широкий поршень, а силу прикладывают к узкому. Посчитаем силу, необходимую для того, чтобы удерживать груз массы M неподвижно. Если поршни находятся на одном уровне, то давления под ними должны быть

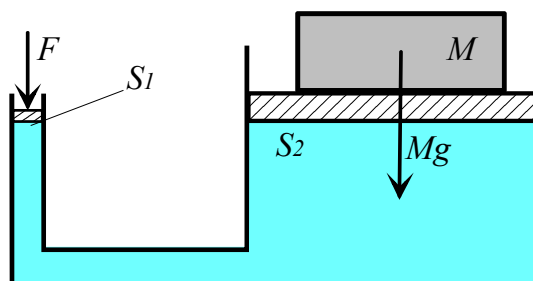


Рис. 4. Принцип работы гидравлического подъёмника.

одинаковы: $P_1 = P_2$. Но $P_1 = \frac{F}{S_1}$, а $P_2 = \frac{Mg}{S_2}$. Отсюда получаем, что $F = Mg \frac{S_1}{S_2}$. Т.к. $S_1 \ll S_2$, то и $F \ll Mg$. Заметим, однако, что так как объем жидкости при подъёме груза не меняется, то для того, чтобы поднять груз на небольшую высоту, приходится поршень S_1 опускать на значительную глубину.

Важное замечание. Закон Паскаля *не* утверждает, что давление жидкости одинаково в каких-либо областях. Он утверждает, что если давление приложено к какой-то одной части жидкости, то оно возрастает на эту величину во всех местах в жидкости, т.е. *передается* жидкостью.

4. Закон Архимеда.

Тело, впернутое в воду,
Выпирает на свободу
С силой выпертой воды
Телом, впернутым туды.

На тело, погруженное в жидкость или газ, действует выталкивающая сила, равная весу жидкости, вытесненной телом.

Выталкивающая сила возникает потому, что давление в жидкости возрастает с глубиной. Таким образом, снизу на тело действует большее давление, чем сверху. Представим себе, что в жидкость плотности ρ_0 помещено тело плотностью ρ (рис. 5). Для простоты предположим, что это цилиндр высоты h с площадью торцов S . Тогда на верхнюю грань цилиндра будет давить слой жидкости высотой h_1 :

$$P_1 = \rho_0 g h_1.$$

Поэтому сверху на цилиндр будет действовать сила

$$F_1 = \rho_0 g h_1 S.$$

Аналогично снизу на цилиндр будет действовать сила

$$F_2 = \rho_0 g h_2 S.$$

Сумма этих двух сил равна

$$F_A = \rho_0 g (h_2 - h_1) S = \rho_0 g h S = \rho_0 g V.$$

Эта сила, называемая архимедовой, численно равна весу жидкости, занимающей объем погруженной части тела.

Архимедова сила не зависит от формы тела. В общем виде закон Архимеда можно вывести с помощью следующих рассуждений. Предположим, некое тело D произвольной формы помещено в жидкость. В этом случае на него действуют две силы: сила тяжести и искомая архимедова сила. Воспользуемся теперь принципом отвердевания и заменим тело D на равное ему по форме тело D', имеющее плотность жидкости. Т.к. теперь тело D' неотличимо от жидкости, оно должно покоиться, т.е. сумма сил, действующих на него должна быть равна нулю. Отсюда следует, что сила тяжести в этом случае уравнивается архимедовой силой, т.е. архимедова сила равна весу жидкости в объеме тела D.

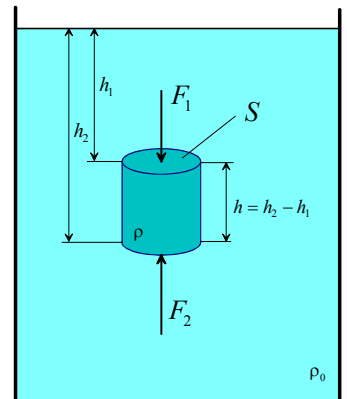


Рис. 5. К расчёту выталкивающей силы

Сила Архимеда зависит только от формы тела и не зависит от его плотности, поэтому и для первоначального тела D сила Архимеда будет равна весу вытесненной им жидкости.

Есть другой вывод закона Архимеда, основанный на методе виртуальных перемещений. В этом случае можно взять тело произвольной формы и посмотреть, какую работу придётся совершить, при перемещении тела вверх (или вниз) на небольшую величину. Такое перемещение равносильно тому, что мы меняем местами тело и область воды, которую оно займёт после перемещения. Из подсчёта работы, которая требуется для такой замены и следует закон Архимеда.

Наконец, можно просто вывести закон Архимеда через метод отвердевания. Заменим погружённое в воду тело «твёрдой водой». Очевидно, что вода в воде ни тонуть, ни всплывать не будет. Следовательно, выталкивающая сила, действующая на «твёрдую воду» равна её весу.

На основе закона Архимеда можно вывести *условие плавания тел*. Если тело плавает на поверхности жидкости, следовательно, его сила тяжести уравновешена архимедовой силой $F_T = F_A$. Пусть объём тела V , плотность ρ , плотность жидкости ρ_0 , объём погруженной части $V_n \leq V$. Тогда сила тяжести, действующая на тело, равна

$$F_T = mg = \rho V g.$$

Архимедова сила, в этом случае, равна

$$F_A = \rho_0 g V_n.$$

Отсюда получаем условие плавания тела:

$$\rho \leq \rho_0,$$

т.е. для того, чтобы тело плавало, его плотность должна быть меньше плотности жидкости.

Очень важное замечание: закон Архимеда не применим в случае, когда погруженное тело лежит на дне (под него не подтекает жидкость). В сложных случаях, например, когда тело находится на границе двух несмешивающихся жидкостей, лучше делать прямые расчёты сил (например через метод виртуальных перемещений).

Задача: Закон Архимеда.

На горизонтальном дне бассейна под водой лежит невесомый шар радиуса r с тонкой тяжёлой ручкой длины l , опирающейся о дно (рис 6). Найти наименьшую массу ручки, при которой шар ещё лежит на дне. Плотность жидкости равна ρ_0 .

Решение.

Условия равновесия:

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_i = 0 \\ \sum \vec{M}_i = 0 \end{cases}$$

в нашем случае запишутся следующим образом:

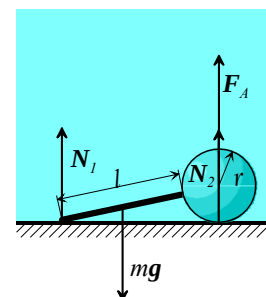


Рис. 6. К задаче.

$$\begin{cases} F_A + N_1 + N_2 - mg = 0 \\ (F_A + N_2)(l + r) \cos \alpha - mg \frac{l}{2} \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

где α – угол между ручкой и дном, N_1 и N_2 силы реакции опоры, моменты считались относительно точки касания ручки и дна.

Предельный случай наступает, когда сила реакции опоры N_2 становится равной нулю. В этом случае система уравнений приобретает вид:

$$\begin{cases} F_A + N_1 - mg = 0 \\ F_A(l + r) - mgl/2 = 0 \end{cases}$$

Подставляя выражение для силы Архимеда $F_A = \rho_0 g V = \rho_0 g \cdot \frac{4}{3} \pi r^3$, из второго уравнения системы получаем:

$$m = \frac{F_A(l + r)}{gl} = \frac{2\rho_0 g \frac{4}{3} \pi r^3 (l + r)}{gl}.$$

$$m = \frac{8}{3} \pi r^3 \rho_0 \left(1 + \frac{r}{l}\right).$$

■

5. Задачи

1. В ртути плавает кусок железа. Поднимется или опустится он, если поверх ртути налить воду так, чтобы она полностью покрыла железо?
2. стакан воды уравновешен гирьками на рычажных весах. Как изменится равновесие, если в стакан опустить металлическую гайку, подвешенную на тонкой нити, так, чтобы она не касалась стакана?
3. На рычажных весах слева и справа находятся одинаковые стаканы с водой. В левый стакан помещён шарик от пинг-понга, удерживаемый внутри воды тонкой нитью, прикрепленной ко дну стакана. В правый стакан помещён стальной шарик такого же размера, удерживаемый внутри тонкой нитью, прикрепленной к потолку помещения, в котором проводится эксперимент. Уровни воды в обоих стаканах одинаковы. Что покажут весы?